مجلـــة العلـــوم التربـــوية والدراســـات الإنســـانيـــة
Humanities and Educational Sciences Journal
ISSN: 2709-0302 (online)
ISSN: 2617-5908 (print)

العلاقة بين الصرامة الرياضية والتفكير ما وراء المعرفي لدى معلمي المرحلة الثانوية(*)

أ.د/ هلال بن مزعل بن هليل العنزي
أستاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات
كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية
جامعة الحدود الشمالية - السعودية
hilalmezel@hotmail.com

*) تاريخ تسليم البحث 26/9/2025 تاريخ قبوله للنشر 2/11/2025
*) موقع المجلة: http://hesj.org/ojs/index.php/hesj/index

العلاقة بين الصرامة الرياضية والتفكير ما وراء المعرفي لدى معلمي المرحلة الثانوية

أ.د/ هلال بن مزعل بن هليل العنزي
أستاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات
كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية
جامعة الحدود الشمالية - السعودية

الملخص

هدف هذا البحث إلى قياس مستوى الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي، وبحث العلاقة بينهما لدى معلمي المرحلة الثانوية، عبر منهج وصفي كمي، تضمن التصميم الوصفي المسحي؛ لتحديد عبارات مقياسي المتغيرين، والتصميم الوصفي الارتباطي؛ للكشف عمَّا إذا كانت هناك علاقة ارتباطية دالة إحصائيًّا بينهما، وأُخِذَ بأسلوب الحصر الشامل لجميع معلمي الرياضيات في مدارس البنين الثانوية بمدينة عرعر، بوصفها عينة قصدية، وبلغ عددهم (71) معلِّمًا، في (21) مدرسة ثانوية، وتكوَّن مقياس الصرامة الرياضية من (15) عبارة في أربعة أبعاد، وتكون مقياس التفكير ما وراء المعرفي من (36) عبارة في ثلاثة أبعاد، وتمَّ تطبيق البحث في الفصل الدراسي الثاني (1446هـ) بمدينة عرعر، وبيَّنت النتائج أنَّ مستوى المعلمين كان متوسِّطًا على المقياسين، وبلغت قيمة ارتباط بيرسون Pearson بينهما (0.310) ، وهي قيمة دالَّةً إحصائيًّا عند مستوى الدلالة ($\alpha \leq 0.01$)، وتعني وجود علاقة ارتباطية طردية متوسطة بين المتغيرين لدى المعلمين، وفي ضوء نتائجه، قدَّم البحث مجموعة من التوصيات والمقترحات.

الكلمات المفتاحية: الصرامة الرياضية، التفكير ما وراء المعرفي، معلم الرياضيات، المرحلة الثانوية.

The Relationship Between Mathematical Rigor and Intellectual Flexibility Among Secondary Stage Teachers

Dr. Hilal Mezel H. Al-Enezi
Professor of Curriculum & Instructions
in Mathematics Education
Faculty of Humanities and Social Sciences
Northern Border University- KSA

Abstract

This research aimed to measure the level of mathematical rigor teaching and metacognitive thinking, and to examine the relationship between them among secondary school teachers, through a quantitative descriptive approach, which included a descriptive survey design. To determine the terms of the two variable scales, and the descriptive correlational design; To detect whether there is a statistically significant correlation between them. The method of comprehensive inventory of all mathematics teachers in boys' secondary schools in the city of Arar was adopted. As a purposive sample, the number was (71) teachers in (21) secondary schools. The mathematics rigor scale consisted of (15) statements in four dimensions, and the metacognitive thinking scale consisted of (36) statements in three dimensions. The research was implemented in the second semester (1446) in the city of Arar. The results showed that the level of teachers was average on the two scales, and the Pearson correlation value between them reached (0.310), which is a statistically significant value at the significance level ($\alpha \leq 0.01$), and it means that there is a moderate direct correlation between the two variables for teachers. In light of its results, the research presented a set of recommendations and proposals.

Keywords: Mathematics Rigor, Metacognitive Thinking, Mathematics Teacher, Secondary Stag

المقدمة:

تميز هذا العصر الحديث بتغيرات بالغة أَثْرَتِ الحياة، وأثَّرت فيها، ومن ذلك المعرفة الإنسانية، بوصفها عامل مفارقة لتوجيه التطور، وقياس التقدم، وتبرير ثقافة المنافسة، في زمن يحسن بالمؤسسة التعليمية دعم أدوار المجتمع لاستثمار مكوناته، وعلاقاته، وتنميتها عبر تربية شاملة، تدعم فهم الواقع، والتعامل المرن والمنتج معه.

ومن المفيد لتنمية التفكير تجاوز حدود استيعاب المعطيات، أو اقتراح خوارزمية الحل صوب إدراك المتعلم عملياته العقلية، والمعرفية عبر تعلمه، وصولًا إلى ضبط هذا التفكير، وقيادته، وهو يعي مخرجات طريقته؛ ليكون أقدر على مراجعة فعل العقل، وقياس مستواه، وأثره، واستثمار قدراته العقلية، ومعرفته العلمية، فيكون اقتصادي التفكير: جودةً وتجديدًا، علاوةً عن الوقوف على أحاسيسه إزاء ما يفكر فيه، ومنهج تفكيره، ومقاصده.

والمعلم داعم للتفكير ما وراء المعرفي، بتأملاته في أفكاره، وأفكار متعلميه تبعًا لمحتوى التعلم، ومهامه، وإثارته عقولهم للتفكير في تفكيرهم، وتنميةً لثقتهم بأنفسهم؛ لتعميق تعلمهم، بما يزيد قدرتهم، وحماستهم، ومتعتهم في سبيل الثراء المعرفي، واستشعار تنوع تعلمهم، وفائدته (Blackburn, 2023).

ويكون المتعلم وفق ما سبق، أقدر على التوظيف، والتوليف للمعطيات، وإكمال السياق، وتبني إجراءات نافعة في حل المشكلة، أو صنع القرار، علاوة عن قيادة مبادراتهم الذاتية، وهم يجودون الفهم، والممارسة، والعلاقة، والدور، في بيئة تعلم جعلتهم نشطين في مهام تعلمهم (Buser, 2018).

وللرياضيات المدرسية دور مهم في هذا المجال، خاصَّةً وهي مادة تعد تنمية التفكير أهم أهداف تدريسها، إن لم تكن الهدف الأهم في ظل أن الرياضيات بنية معرفية مفاهيمية متكاملة تأبى النقص، والتناقض، وتؤثر الحجة، وتدفع العقل، ليدرك مكونات الحدث المُشْكِل، وعلاقاته؛ لفهم طبيعته، والاقتراح عبر تفكير مرنٍ منضبطٍ في آنٍ معًا؛ لضمان بدء خطوة أولى صوب الحل وفق منطق الرياضيات الدقيق، والحيوي(Gordon, 2010).

وهذه الرياضيات، التي رُبَّما تُرى على أنَّها معقَّدةٌ، صارمةٌ، ومتحفظةٌ أحيانًا، نتيجة رد فعل ثقافي، أو نفسي، هي دومًا أداة فارقة لفهم سياق الحياة بكمِّه، وعلاقاته؛ لدقتها، ولضبطها، بقدر مكَّنها من تسهيل المهام اليومية، بحل المشكلات، والتواجد القائد، والمؤثر في التطور التقني، وتحليل المفاهيم العلمية. (Yorulmaz et al., 2021).

ومع هذا، تبدو ثمة تحيزات، ومخاوف بشأن هذه الرياضيات، حيث يدعم تنفيذ المعلم تعليمًا رياضيًّا بطريقةٍ مثيرةٍ، ومحفِّزةٍ، وميسِّرةٍ، اهتمام الطلاب بها، وبالتالي خفض القلق، والكراهية إزاءها، وتطوير مواقف إيجابية نحوها.

ولم يمنع كون الرياضيات المدرسية منهجًا قيميًّا ومعرفيًّا، من تصور بعض المتعلمين أنَّها جافة، مكلفة خاصَّةً إذا ما رأوا التزامها وانتظامها مثالًا على التعقيد، بدلًا من أن يكون شاهد منهجيَّةٍ وإنتاجيَّةٍ، في المعالجة والتحليل؛ لذا فيحسن إظهار قانونية الرياضيات، بوصفها مؤشِّرًا على كراهية الأخطاء، والسعي نحو الصواب؛ لتنمو ثقتهم بعدلها، ونفعها، عوضًا عن إهمال تعلمها، أو استشعار تدني قيمته ومردوده.

ومن الممارسات التدريسية الداعمة هذا التوجه تأني المعلم زمن هفوة المتعلم، وتأمله في سياق الاتصال الرياضي؛ للوقوف على دوافع الاستجابات المعرفية، التي أثارها المتعلم، وتوجيه هذا المتعلم عبر إثارة الشك العلمي

إلى التمعن مجدَّدًا في أفكار تعلمه الرياضي، ودعم ثقته بنفسه بقبول اجتهاده في التبرير والتفسير، بما يجعل ثبات التعلم لديه قائمًا على القناعة واليقين، دون فجوة في الفهم، أو قصور في الاستنتاج.

وتعليم الرياضيات الجيد سلوك تنموي استثماري، يتعامل مع المغالطات المنطقية من باب المثال، بوصفها فرصًا لتعلم أعمق، وأوثق صلة بمعنى التعلم المستهدف بالتنمية والتمكين لدى المتعلم، ومن عوامل نجاح هذا الدور لمعلم الرياضيات: تبني شراكة المتعلم، واجتماعيته، ومسؤوليته في تعلمه، عبر دفعه لفحص ما يتبناه من مقترحات، أو ما يطبقه في ضوء فهمه وقدرته على الدفاع عن فكرته، وتراجعه عنها باتزان، عندما يستكشف خطأها، أو نقصها، وهنا ستبدو صفوف الرياضيات بيئة محفزة تشجع قبول التعلم الرياضي، والرياضيات بصرامتها الضابطة، علاوةً عن تحسين اتجاهات المتعلمين نحو فهمها، والتفوق فيها، والإفادة منها، وهم ينالون الحظوة بنشاط تعلم يثري خبراتهم في الحياة، ناهيك عن تطويرهم علميًّا، فيفكرون في تفكيرهم من قبل حرصهم على استبقاء صرامة الرياضيات في عقولهم قوةً تحول دون الوقوع في الأخطاء، وتقبلهم تلميحات معلمهم، وتصريحاته حول اجتهاداتهم في حلول المسائل، والمشكلات الرياضية، ويشعرهم بفوائد الرياضيات، وارتباطها بمشكلات الواقع: تحليلًا، وفهمًا، وتفسيرًا، وإصلاحًا؛ فسيغيرون أحكامهم المسبقة عن الرياضيات، وقلقهم، ومخاوفهم بشأنها.

مشكلة البحث:

تتنوع أو تختلف معاني صرامة الرياضيات في أذهان معلمي الرياضيات، ففي حين يراها بعضهم بشكل ضيق، متمركزة في نطاق حسابات وإجراءات، ربما بدت صعبة، أو معقدة، يكون في المقابل يرى معلمون هذه الصرامة وفق توظيف أقوى وأشمل، ممارسات، ومواصفات جادة وجيدة، ومن ذلك: الطلاقة الإجرائية، والفهم العميق، والمرونة في الربط والتحليل، صوب إنتاج حلول إبداعية، وابتكار طرائق فارقة فهمًا وتطبيقًا، علاوةً عن مشاركة فعالة، وتعاونية، وتفكير تشاركي للمتعلمين لشرح الحجج الرياضية، وتبريره وبنائها، بما يمكنهم من التعبير الدقيق، بلغة الرياضيات، عن أفكار تعلمهم الرياضي، ونمذجتهم الرياضية هذه الأفكار والحلول.

ومهم إدراك معلم الرياضيات أهمية تفكيره حول صرامته الرياضية؛ لتوظيف وعيه بمتعلقات المشكلة الرياضية، والتفكير الرياضي الناشئ تبعًا لمعطياتها، وعلاقاتها، في تيسير التعلم الرياضي الذي يستهدف سياق تدريس هذه المشكلة تحقيقه، أو تنميته، أو ربَّما قياسه، ومن ثمَّ تقويمه، في بيئة تعلم رياضي تستثير أفكار المتعلمين، بقيادة معلم يتأمل الحدث التدريسي، ويدعم التفكير الرياضي للمتعلمين وفق منطق الرياضيات نفسها، وخصائص المحتوى محل المعالجة؛ ليتمكنوا من بناء حجة رياضية، وكشف مغالطة منطقية.

ولينتقد المتعلمون أفكارهم بفهم، وبثقة، بما يجعلهم يتقبلون مستوى الدقة العلمية، والضبط الإجرائي المحكَم للمعلم، ويجب أن يُدَرَّبُوا؛ ليلاحظوا أخطاء تعلمهم، وليبنَّوا مراجعة حلولهم، والتأكد من جدوى مقترحاتهم، وأنهم سيبرهنون، أو يستنتجون وفقًا لقانون الرياضيات، وعليه؛ فيتطلب الفهم الرياضي العميق موازنة بين صرامة المعلم الأكاديمية، وقدرته، وقدرة متعلميه على تقبُّل أخطاء التعلم، واستثمارها، والبناء عليها صوب تشخيص، ومعالجة، وإتمام، لصياغة، أو خوارزمية، ضمن برهنة، أو مسألة رياضية.

وأوصت دراسة الحربي وحسين (2017) بتحفيز معلمي رياضيات المرحلة الثانوية على توظيف مهارات ما وراء المعرفة في التدريس، وتدريب الطلبة على توظيفها في المهمات التعليمية، وحل المشكلات، واتخاذ القرارات.

وترتبط صعوبات الرياضيات، وحل المشكلات بإهمال عمليات معرفية، أو ما وراء المعرفية، فأشارت دراسة بيرنالد وباتشو (Bernald & Bachu, 2015) إلى تأثر الأداء الرياضي بشكل ملحوظ وإيجابي، بتطبيق إستراتيجيات ما وراء معرفية، ومن ثم، فما وراء المعرفة يؤدي دورًا رئيسًا في التعلم الرياضي، والتحصيل الرياضي (Grizzle-Martin, 2014)، ومن أبرز عوائق هذا الدور ضعف قدرة الطالب على إجراء المراقبة المطلوبة، والتحكم في التعلم، لا الافتقار للمعرفة الرياضية (Grant, 2014)، وعليه؛ فيحتاج المعلم تقديم إرشادات صريحة للطلاب لمراقبة تعلمهم والتحكم فيه؛ لتحقيق توجُّه ذاتي قوامه فهم، وقبول ورغبة في الإنجاز (Raoofi et al., 2013)، ما يتطلب تأمُّل إستراتيجياته التدريسية والتقويمية، وتوظيفه معينات التعلم؛ ليكون عبر وعيه بمعرفته التدريسية، وتحكمه بمراحله، أقدر على توجيههم لملاحظة تفكيرهم الرياضي، ونقده وتعديله بقناعة وبثقة.

وهنا، يتبنَّى البحث عاملين عقليين عاطفيين في آنٍ معًا، لمعلمي رياضيات المرحلة الثانوية، يمكن أنْ يؤثِّرا في ممارساتهم التدريسية، هما: الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي، من حيث دراسة العلاقة بينهما، لدى هؤلاء المعلمين، عبر سياق تدريس الرياضيات.

وعليه؛ فقد صيغت مشكلة البحث في محاولته إجابة سؤاله الرئيس، وهو:

ما العلاقة بين الصرامة الرياضية والتفكير ما وراء المعرفي لدى معلمي رياضيات المرحلة الثانوية؟

أسئلة البحث:

تفرَّعت عن السؤال الرئيس للبحث، الأسئلة الجزئية الآتية:

1. ما مستوى الصرامة الرياضية لدى معلمي المرحلة الثانوية؟
2. ما مستوى التفكير ما وراء المعرفي لدى معلمي المرحلة الثانوية؟
3. هل توجد علاقة ارتباطية دالة إحصائيًا عند ($\alpha \leq 0.05$) بين الصرامة الرياضية والتفكير ما وراء المعرفي لدى معلمي المرحلة الثانوية؟

أهداف البحث:

يهدف هذا البحث إلى:

1. قياس مستوى الصرامة الرياضية لدى معلمي المرحلة الثانوية.
2. قياس مستوى التفكير ما وراء المعرفي لدى معلمي الرياضيات للمرحلة الثانوية.
3. بحث العلاقة بين مستوى الصرامة الرياضية ومستوى التفكير ما وراء المعرفي لدى معلمي المرحلة الثانوية.

أهمية البحث:

1. الأهمية النظرية، بالتحليل المعرفي، والتأطير للصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي لمعلمي رياضيات المرحلة الثانوية، وفقًا للعلاقة المستهدفة بالدراسة بينهما، مع الإشارة لقلة الدراسات التي بحثت أيًّا من المتغيرين في تعليم الرياضيّات محلِّيًا، علاوةً عن غياب أية دراسة تفحص العلاقة بينهما عربيًّا، في حدود علم الباحث.

2. الأهمية التوظيفية، وتتبيَّن بمنافع متعلقة بالتنمية المهنية لمعلم الرياضيات عبر هذين الموضوعين الحيويين، بما يضمن دعم التميز، والاستدامة لهذا الحقل التطويري المهم، خاصَّةً من حيث دعم الممارسات التدريسية، بنوعيَّة من الأداءات، والأدوار، متصفة بضبط، وحياد، ودقة، وتأمل، وتنوع، وإنتاجية، بما ينمي باقتدار، قيم المعلم، واتجاهاته، وثقافته، وتأملاته التدريسية، ويحسِّن عمليات تعليم الرياضيات وتعلُّمها.

حدود البحث:

تمثَّل الحد الموضوعي للبحث بالصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي، وتمثَّل حدُّها البشري بمعلمي رياضيات المرحلة الثانوية، بمدينة عرعر، السعودية، وهذا هو الحد المكاني، علاوةً عن حد زماني تعيّن بتطبيق البحث ميدانيًّا الفصل الدراسي الثاني، للعام (1446هـ).

مصطلحات البحث:

الصرامة الرياضية:

هي اصطلاحًا: دقة الدليل الرياضي، ودلالته على البرهان المتعلق به، بما يضمن سلامة المنطق الرياضي الصحيح، وبالتالي صحة خطوات إنتاج الاستدلال الرياضي (Hamami, 2014,.8).

وعرَّفها البحث إجرائيًّا، بوصفها: "الممارسات التدريسية لمعلمي رياضيات المرحلة الثانوية الهادف إلى رفع مستوى الإتقان الشامل والمتعمق لدى المتعلمين عند تنفيذهم مهام تعلم صعبة ذات طلب معرفي مرتفع، وقوامها التفكير التأملي، والتحليل، وحل المشكلات، والتقييم لتفاعل المتعلمين مع مهامهم، ونقدهم أفكار تعلمهم الرياضي، أثناء مناقشة المشكلات الرياضية ضمن معالجة محتوى التعلم الرياضي المستهدَف، بما يدعم قيم الإقناع، والمتعة، والإبداع لديهم، بما يمثل قيادة أصيلة يقوم بها المعلم لبناء المفاهيم الرياضية لديهم، عبر التوقعات القبلية، والدعم الآني، والتقييم البعدي، وتقدير منتَج/منجَز التعلم الرياضي".

التفكير ما وراء المعرفي:

هو اصطلاحًا: "التفكير في التفكير، أو معرفة المعرفة، أو التفكير حول المعرفة الذاتية، أو التفكير حول المعالجات الذاتية، ويشتمل على المعرفة التي يمتلكها الفرد عن عملياته المعرفية، وإلى استخدامه لتلك العمليات من أجل تسهيل تعلمه، وتحسين ذاكرته، وتحتوي الكثير من المهارات التي تلعب دورًا هامًّا في النشاطات المعرفية التي يستخدمها المتعلم أثناء نشاطاته المعرفية، التي تتضمن مراقبة نشطة لعملياته المعرفية، وتتمثل تلك العمليات في التخطيط للمهمة، ومراقبة الاستيعاب، وتقويم التقدم" (خريسات، 2016، 210).

وعرَّفه البحث إجرائيًّا، على أنَّه: "مهام وإجراءات تدريسية لمعلم رياضيات المرحلة الثانوية، تستهدف تنمية مهارات تفكير المتعلمين، وشراكتهم في تعلمهم الرياضي، تبعًا لوعيهم، وتحكمهم الذاتي بمحتوى تعلمهم، ومهامهم ضمنه، في ضوء وعي هذا المعلم بأساليب فهمهم سياق التعلم الرياضي، وتفاعلهم معه، وإنتاجهم أفكار تعلمهم الرياضي المتعلقة، بهذا المحتوى، وهذه المهام، بما يعينه على توجيه تفكيرهم الرياضي صوب الاستنتاج، والتبرير، والبرهنة، في ضوء الحجة، والقياس، والقانون، وصولًا إلى قدرتهم على حل المشكلات الرياضية، والتمكن المفاهيمي، والإجرائي، مع تأكيد قيم الاقتصاد، والبنائية، والاجتماعية، والمتعة لهذا التعلم الرياضي، ونواتجه، وتطبيقاته".

العلاقة بين قلق الصرامة الرياضية والتفكير ما وراء المعرفي:

وتعني هذه العلاقة إجرائيًّا: "مستوى التأثر المتبادل بين الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي لدى معلمي رياضيات المرحلة الثانوية، ويُقاس، ويُعَبَّر عنه بحساب درجة الارتباط بين متوسطي استجابات المعلمين على مقياسي الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي المعدَّين ضمن البحث".

الإطار النظري:

أوَّلًا: الصرامة الرياضية:

تشير الصرامة الرياضية للدعم الثري للتعلم الرياضي، مع خلال دقة الإجراء، وضبط العلاقات، وتمام الحل، وليست العبرة في هذه الصرامة بوفرة العمل، أو الموارد، أو مهام التعلم الرياضي، بقدر ما إنَّ الغاية هنا تلافي الوقوع في الهفوة، ووعي الإجراء، والقناعة بالتوظيف، واقتصادية الحل وكفايته، علاوةً عن كون هذه الصرامة أساسًا في مهام المعلم، وهي تفوق فكرة، أو مستوى المعايير (Blackburn, 2023).

وقوام الصرامة الرياضية فكرة نقض التناقض، وتأكيد فهم أساليب تحليل السياق الرياضي وفق بناء منطقي، يمنع الغموض، بإعمال نقد الفكرة الرياضية، بتأثير فضول علمي، معتد بمرونة الصياغة، والقبول ضمن مناقشة رياضية قوامها شراكة المسؤولية، ونواتج التعلم الرياضي بوصفها صرامة تدعم المراجعة النقدية العميقة للمفاهيم الرياضية، واتساعها، وترابطها؛ لتجاوز أسباب الالتباس، والخلاف؛ لتحقيق ثبات البرهان الرياضي، ولتبقى الرياضيات مقنعة، مثيرة للاهتمام، داعمة وعي المتعلم بما وراء الرياضيات نفسها (Gordon, 2010).

وتُرَى صرامة الرياضيات في نوعين: صرامة المحتوى، المتمثلة بعمق الترابط المفاهيمي، ودعم الفهم العميق، والتمكن المفاهيمي لدى المتعلم، وصرامة تعليمية، تستهدف صنع بيئة معرفية واعية، بتفاعل المتعلم، مع شركائه، مفكِّرًا في مهام تعلمه الرياضي، تبعًا لتمكنه المفاهيمي، وتقبله المهام المركبة (Hull et al., 2014).

وتنطلق هذه الفلسفة من كون توحيد المحتوى وفقًا لمعايير الممارسة الرياضية الأساسية يحقق الصرامة الرياضية المطلوبة، التي هي في الغالب صرامة تعليمية، أو أكاديمية، أو تدريسية، بما يجعل المعنى الوظيفي ظاهرًا ذا دلالة مقصودة محدَّدة، تعين معلم الرياضيات على بأدواره، بما يعينه في تنمية من صرامته التدريسية؛ مما يؤدي إلى تلبية تبعًا لهذه المعايير الجديدة، وبما يدعم تمكُّن المتعلم من فهمٍ أعمقَ لمحتوى التعلم الرياضي.

وتنوعت أفكار الصرامة الرياضية تبعًا لتنوع أساليب التحليل، والتبني لدى خبراء مناهج الرياضيات، فهناك أربع آراء حول هذه الصرامة، فالصرامة من جانب توظيف منطقية الاستنتاج الرياضي القائم على الفرضية لإثبات النظرية، وهي من جانب ثانٍ الالتزام الاعتيادي بمحتوى الرياضيات، وفرض قبوله على المعلم، والمتعلم في آنٍ معًا، وهناك من رأى دلالة صرامة الرياضيات متمثلة في اتصاف محتوى المهام الرياضية، وحلولها بالصعوبة، والتعقيد، والتحدي، وأخيرًا تأتي الصرامة الرياضية عند بعضهم معنىً يكافئ الجبر بمحتواه، ومهاراته، بوصفه منطلقًا نحو خيارات أخرى في التعلم الرياضي (Dana Center Mathematics Pathways, 2019).

وتمثل الصرامة الأكاديمية في الرياضيات مؤشر وفاء بمطالب التعلم الرياضي المتصف بالفضول، والشغف المعرفيين، عبر مهام تعلم رياضي قائمة على التحدي، وتستلزم مستويات عليا من الإدراك، بما يدعم تنمية المهارات، والمعتقدات الرياضية، وقيم التعلم (Cooper, 2014).

وتتطلب الصرامة في الرياضيات تجاوز المعرفة الرياضية بوصفها مستهدفًا متدنيَ القيمة، صوب إثارة تفير تشاركي، وتعاونية مشوقة في بيئة تعلم مثيرة، بما يجعل هذه المعرفة الرياضية أساسًا لتعلم رياضي نشط، يتضمن نقاشات عميقة بلغة رياضية دقيقة، وتفكير ناقد يستثمر الانطباعات الأولى حول المحتوى الجديد، وتنظيمه، وأفكاره، علاوةً عن توظيف خبرات المتعلم السابقة، لصنع ألفة المعرفة الرياضية الجديدة، وتوازنها، في بيئة تعلم بناية، تعتد بتوفير فرص التعلم الرياضي واستثمارها (Meyer et al., 2017; Boston & Wolf, 2006).

ومن المهم تعزيز صرامة صفوف الرياضيات، بما يدعم التمكن المعرفي للمتعلم، وتعميق فهمه، تنميةً لقيم الندية، والتحمل، والتهور في التصور، والتبني للبنى، والعلاقات، والمهام، بما يثبت قدرة هذه الرياضيات: صرامةً، وتنوُّعًا، ومرونةً، على قيادة التطوير، ابتداءً بعقله، وصولًا لاستنطاق ثراء تفكيره المنتج الرياضي.

ومن مؤشرات هذا التوجه، إعمال اليابان معنىً وظيفيًّا لصرامة الرياضيات تمثّل في توظيف مداخل، وإستراتيجيات تدريسية فعالة، تنمي أنواعًا متعددة من التفكير الرياضي، وتحقق معنى الرياضيات الوظيفية، وحماسة المتعلم، واتصاف تعلمه الرياضي بالثراء، والنشاط، والإنتاجية، ما ولَّد ثقافةً تدريسيَّةً تعتدُّ بالدقة، والالتزام في إجراءاتها، وتقويمها، وتحسين مكوناتها (Stamm, 2018).

وتتجاوز الصرامة الرياضية أفكار التواصل، والدقة، والتبرير، والاستدلال، إلى إثارة استجابة المتعلم، عبر سياق الرياضيات، واستثمار هذه الاستجابة، أو توجيهها، بما يجعل هذا المتعلم يتفوق في مهمة الحصول على إجابة صحيحة، وإظهار فهم ترابطي جيد للأفكار الرياضية اللازمة لحل مشكلة، أو مسألة رياضية ما.

وتُوْجَزُ عناصر الصرامة الرياضية وفق ما أورده شازان وبول (Chazan & Ball, 2001)، ولامبرت (Lampert, 2001)، وشونفيلد (Schoenfeld, 2002)، وريس وآخرين (Reys et al., 2003)، ووايس وباسلي (Weiss & Pasley, 2004)، وولف وآخرين (Wolf et al., 2004)، في الآتي:

1. محتوى المهمة: من عوامل دعم الصرامة الرياضية وفرة مهام تعلم رياضي متنوعة، تثري المتعلم مفاهيميًّا، صوب تمكن، ودقة في الاستيعاب، والتوظيف، واستشعار قوة البنية الرياضية، ووظيفية مفاهيميها، علاوةً عن المتعة في إتقان الإجراءات، وضبط العمليات عبر خطوات متسلسلة للحل الرياضي، وتبرز هنا فكرة الطلب المعرفي لمهام التعلم الرياضي بوصفها مؤشرًا أساسًا للصرامة في الرياضيات، حيث يكون التدريب على العمق المفاهيمي، وتحسين قدرات الطلاب على التفكير، والتواصل الرياضي، وحل المشكلات الرياضية، وتتأكد أهمية هذه المهام من حيث إعمالها في جذب انتباههم لمفهوم رياضي معين، وتقديم معلومات معينة تحيط بهذا المفهوم، علاوةً عن توجيههم لتحديد معايير معالجة هذه المعلومات، صوب وصولهم للمهارة فيما يؤدونه فعلًا داخل صفوف الرياضيات وهم يقارنون، في ظل ما ربما لاحظوه من تباين بين الأفكار، والإجراءات، فيكون

من المحتمل أن ينوا علاقات جديدة، وفهمً جديدً للرياضيات؛ وعليه يوفر تنوع المهام المختلفة فرصًا متنوعة للتعلم، وتوقعات متباينة لأنماط التفكير الرياضي، ومستوياته، من حفظ، وحل للمشكلات، وتخمين، واستدلال، وغير ذلك، تبعًا لمستوى المتطلبات المعرفية للمهمة الرياضية، فمثلًا: تحوي مهمة عالية المستوى نقاط دخول، وإستراتيجيات حلول متعددة، تسمح للطلاب بمعالجات متنوعة وفقًا لتنوع، أو ربما تباين خبراتهم السابقة، علاوةً عن اتصاف المهام عالية المستوى بتمثيلات متعددة، وفرص تكوين روابط للأفكار، والتمثيلات الرياضية، والتواصل الرياضي، وفي المقابل، تتحدد المهام منخفضة المستوى بالحفظ، أو تطبيق الإجراءات لا تتصل بالمعنى، أو الفهم، وعليه؛ فمستوى الطلب المعرفي للمهام التعليمية مؤشر هام لجودة تعليم الرياضيات.

2. تنفيذ المهمة: ربَّما شعر المعلمون، والطلاب بتدني الارتياح تجاه الأساليب الاعتيادية للتدريس، والمهام الإجرائية للتعلم الرياضي؛ نتيجة غموض الفهم، أو صراع الأدوار، ما يتطلب مرونةً في العلاقات، وأسلوب التوجيه، علاوةً عن كفاية معلومات المهمة الرياضية، وتركيزها، مع تأكيد أهمية قيام مهام الاتصال الرياضي على تفكير تشاركي، يدعم مفاوضة المعنى، واستثمار مناقشة الأفكار، ومقترحات الحل، ضمانًا لفعالية أدوار المتعلمين في مهام التعلم الرياضي، وهذا مؤشر مهم لإصلاح التعليم الرياضي، مفاده أن الرياضيات المدرسية مؤثرة بوعي، وباقتدار في تنمية التفكير، وتحسين عملياته، وآثاره، ويحدث أن يطلب المتعلمون في المهمة المعرفية عالية المستوى التعليمات من المعلم خطوة بخطوة، هذا إذا لم يضطروا للانسحاب منها، ما لم يعنهم المعلم للعودة بثقة إلى تكليفاتهم ضمنها، وإفادتها باتصال رياضي ذي معنى، عبر دعم تبادلي لإكمال الإنجاز بإتقان، وتعد أساليب المهام المعرفية عالية المستوى أعظم مكاسب التعلم الرياضي، وتطوُّر قيم هذا التعلم؛ بوصف ما سبق يشير إلى سمة إصلاحية لتعليم الرياضيات. وتبرز هنا أيضًا علاقة بين الحفاظ على مستوى عالٍ للمهام الرياضية، وتحقيق درجة مرتفعة من الصرامة الرياضية بوصفها تضمن دقَّةً، وانضباطًا، وإنجازًا بإتقان.

3. المناقشات حول المهمة: تمثل المناقشة الرياضية بعد تنفيذ المهمة ميزة تؤثر في الفهم العميق، والتمييز بين دقائق المفهوم الواحد، والفروق بين المفاهيم، ضمن سياق رياضي واحد، تبعًا لخبرات التعلم الجديدة، ومستويات الاتفاق، والتباين بين الطلاب؛ إذ يرى الطلاب كيف تعامل الآخر مع المهمة؛ فيكسبهم هذا نظرة ثاقبة حول إستراتيجيات حل، وعمليات استدلال ربما أهملوها، وهنا، يمكن للمعلمين منحهم فرصًا لشرح أفكارهم، وتحليل فهمهم التعميمات الرياضية، أو إجراء ربط بين مفاهيم، أو إستراتيجيات، أو تمثيلات رياضية، وبالتالي تطوير الفهم الرياضي لهم جميعًا. ومهم جدًّا استثمار شراكة كل متعلم بشكل تفاعلي، يضمن إظهارها بوصفها أثرًا، أو دعمًا للناتج الكلي النهائي للمناقشة؛ إذ تركز المناقشة بدايةً على عمل الطلاب، وتوجههم للتحليل، والمقارنة، والربط بوصفه تأمُّلًا، ثمَّ يصبح بعدها موضوعا صريحًا للمناقشة.

4. توقعات المهمة: غالبًا ما يتشكَّل تنفيذ المهام عالية المستوى وفق أساليب تعزز التعلم بفهم، عبر معتقدات المعلمين، والطلاب حول فضلى الفرص لهذا التعلم، والتعلم ضمن فريق شريك في التفكير، وخطة الحل، والتنفيذ، والتقويم، يدعم قدرة المعلم على ملاحظة تفاعلهم، ومفاوضاتهم حول أفكارهم، مع تأكيد الدور

الرئيس لتصورات المعلمين لما يتوقعون حدوثه في صف الرياضيات، وأهم ذلك إشعارهم المتعلمين بمسؤوليتهم تجاه نتاجات تعلمهم الرياضي؛ لتحسين مشاركتهم في المهام المعرفية عالية المستوى، ومن غير المرجح ذهاب الطلاب عفويًّا إلى ما هو أبعد مما تتطلبه المهمة، أو المعلم، بل سيحددون المعلومات، والعمليات الضرورية لإنجاز المهمة، وسيعدلون إستراتيجيات عملهم؛ لتتوافق مع تصوراتهم حول المهمة، أو متطلبات المعلم، وعليه؛ فتوقعات المعلم بشأن تعلم الطلاب يمكن أن تؤثر على ما يحدث أثناء الموقف التعليمي، وعلى مستوى تجارب تعلمهم الرياضي مع هذا المعلم، ونهايةً، تحدد توقعات المعلمين ما سيتم مساءلة الطلاب عنه، وبهذا تكون هذه التوقعات، وهذه المساءلة من أهم مؤشرات صرامة الرياضيات.

وبحثت دراسات سابقة موضوع الصرامة الرياضية، من زوايا متعددة، فاهتمت دراسة بوستن وولف (Boston & Wolf, 2006) بوصف معايير الصرامة الأكاديمية في تقييم برامج رياضيات المرحلة الابتدائية، عبر تطوير أداة تقييم لقياس جودة التعليم، تدعم نظام مساءلة مرن تعليميًّا، بما يفيد لاحقًا في التطوير المهني لمعلمي الرياضيات، في كاليفورنيا، وقد تباينت مستويات موثوقية قيم الصرامة بين مدارس العينة، علاوةً عن تباين فرص التعلم الرياضي بينها.

وأظهرت دراسة جونسون (Johnson, 2010)، عبر تصميم شبه تجريبي، وأدوات قياس، ومعالجة مختلطة، فاعليَّة المجتمعات المهنية، في أريزونا الأميركية لتشجيع التغيير، والتحسين، والصرامة، والمشاركة في صفوف رياضيات الصفين (3-4)، وأهمية الصرامة بوصفها قيمة تدعم نوعيًّا ممارسات التدريس، ونواتج التعلم.

وأفادت دراسة أكاي (Akcay, 2012) من الأدوات المصممة وفقًا لأبعاد الصرامة لتقييم معلمي الرياضيات ما قبل الخدمة، في بنسلفانيا الأميركية، لدمج التقنية بمهام التعلم المعرفي العميق، مثل التفكير الاستدلالي، ومن أبرز النتائج أنَّ أغلبية الطلبة قد اختارت، أو أنشأت مهام تعلم بمتطلبات معرفية عالية ضمن نشاط تعلمهم التقني، بمتطلبات عالية المستوى في التنفيذ، واهتمام بشرح التفكير الرياضي، وتعليل الاستدلال الرياضي.

وبحثت دراسة ماكدونو (McDonough, 2013) تأثير مجتمعات التعلم المهنية، في تكساس الأميركية، على معنويات ثمانية معلمي رياضيات للمرحلة الثانوية، وصرامتهم التدريسية، تبعًا لمنهج دراسة الحالة، والمقابلات المركزة، فتبيَّنت إيجابيَّة هذه المجتمعات في رفع معنوياتهم، وتوجيه صرامتهم التدريسية.

ووصفت دراسة دريقير وآخرين (Draeger et al., 2015) آراء طلبة جامعة بوفالو الأميركية عن الصرامة الأكاديمية، عبر استبانة، ومقابلات، ومجموعات التركيز، فتبيَّنت قيم صرامتهم في التعلم ذي العبء المرتفع، ومعايير التقييم والدرجات، ومستويي: صعوبة المحتوى، والاهتمام، ونهايةً ضرورة تبني تعلم نشط يدعم الوصول للمعنى، عبر تفكيرٍ عالٍ، وتوقعات مناسبة، ومستوى تحدٍّ أكاديميٍّ معتدل، وأساليب تناسب اهتمامات الطلبة.

وطوَّرت دراسة بانر (Banner, 2016) الصرامة، من حيث: تصميم المعلم، وتنفيذه مهام عالية المستوى، بتوظيف مصفوفتين لصرامة التنفيذ، وتخطيط الوحدة لضمان صرامة قوامها التدريس الفعال، عبر صرامة تنفيذية، تتضمن شرح المهام، والمراقبة، وطرح الأسئلة، والرد على الأسئلة، وصرامة تخطيطية تشمل تفكيك المعايير،

والتساؤلات الملحة، وتقييم الأداء النهائي، وتصميم تتابعية المهام، في ولاية كونكتيكت Connecticut الأميركية، وبيَّنت النتائج إيجابيَّة التصميمين في فهم المعلمين الصرامة، وقيادتهم تدريسًا ضامنًا لها.

وحلَّلت دراسة ديليتي (Diletti, 2017) تعامل المعلمين مع التحولات الرياضية للصرامة وفق المعايير الأساسية المشتركة للرياضيات CCSSM، في جانب مهامهم التدريس، ورؤيتهم مناهجهم، وتوظيفهم أسئلتهم التعليمية، بدراسة حالة ثلاثة معلمين للجبر، في نيويورك، بتنفيذ الملاحظة، والمقابلة: قبليًّا، وبعديًّا، فتبيَّنت علاقة معقدة بين اهتماماتهم، والمناهج الدراسية المقررة، علاوةً عن تدني مستويات الجهد المعرفي تبعًا للاهتمام التدريسي، وضعف توظيف التحول الرياضي لتحقيق الصرامة الرياضية.

وبحثت دراسة بوسر (Buser, 2018) فعاليَّة مهام الصرامة الأكاديمية لبرامج التدريب في تحسين الممارسات التدريسية الصارمة لثلاثة معلمي رياضيات في المرحلة الابتدائية، في بيتسبرغ الأميركية، فتبيَّنت علاقة إيجابية بين طرح أسئلة عميقة ومحددة على المعلمين حول أهداف الرياضيات الأساسية، ونقل هذه الأهداف للتدريس، وأنه عند توجيه المعلمين لكتابة أسئلة تقييمية متقدمة لمسارات الحل التي سيستخدمها الطلاب لإكمال المهمة، مُنِحَ الطلاب فرصًا لشرح منطقهم الرياضي، وتوسيع نطاق تفكيرهم؛ فأفادهم تدريب معلميهم بتحسين معرفتهم بالمحتوى.

واستنتجت دراسة العيدي (2021) فاعليَّة برنامج تطوير مهني قائم على التدريب التعليمي في الرياضيات لتنمية الصرامة الأكاديمية لمعلمات المرحلة المتوسطة، بمحافظة رياض الخبراء وفق منهج مختلط، وتصميم تتابعي استكشافي؛ لتطوير البرنامج، تبعًا لمتطلّبات تطبيقه، وتصميمًا شبه تجريبي بمجموعة واحدة، لبحث هذه الفاعلية.

وتنوَّعت موضوعات الدراسات السابقة للصرامة الرياضية، ومن ذلك: فلسفة الصرامة الأكاديمية، وبنيتها، وعملها، من حيث: المحاور، والمعايير، والنماذج، والأبعاد، والمصفوفات، والتحولات الرياضية ذات الصلة، وتنمية الصرامة، علاوةً عن موضوعات رُبِطَتْ في هذه الصرامة، مثل: جودة التعليم، والمجتمعات المهنية، ودمج التقنية مع المهام العميقة للتعلم المعرفي للرياضيات، ومعنوية المعلم، وبرامج التدريب في تحسين الممارسات التدريسية الصارمة.

ثانيًا: التفكير ما وراء المعرفي:

يجب إدراك المتعلم أسلوب تعلمه، ومفاهيمه، وإجراءاته؛ لإنجاز مهامه (Öztürk & Kaplan, 2019)، وليصل لما وراء المعرفة، وهو يعي معرفته التكتيكية، والإستراتيجية، ومراقبًا إدراكه (Winne & Azevedo, 2014)، وعليه؛ فما وراء معرفته مؤشر لدرايته بمعرفته، وقدرته على تنظيمها (Flavell, 1976)، بمعنى قدرته تبعًا لوعيه بتفكيره على تغيير تفكيره، وتنظيمه وفق مقتضيات تعلمه الرياضي (Spruce & Bol, 2015).

وعليه؛ فلمفهوم ما وراء المعرفة مكونان، هما: إدراك المتعلم معرفته، وتنظيم هذا الإدراك، عبر وظائف، هي: القدرة على التخطيط، والتحكم، والمراقبة، والتقييم، فتمثل معرفة الإستراتيجيات، والتمثيلات مهارات معرفية، ويمثل الوعي بالمهارات المعرفية، والتفكير فيها مهارات ما وراء معرفية.

ويشير المكون الأول للمعرفة عن المعرفة، ويتضمن فهم المتعلم عمليات تفكيره في تعلمه، وإستراتيجياته الخاصة، وتشمل ثلاثة أنواع للمعرفة، هي: المعرفة التقريرية (التصريحية)، وتشير للوعي بمهارات، وإستراتيجيات لازمة لإنجاز مهمة مطلوبة، والمعرفة الإجرائية، المتعينة المتعلقة بإجراءات متباينة متسلسلة، تُتَّبَعُ لإنجاز المهمة، أي إجابة السؤال، والمعرفة الشرطية، التي تبرر، أو تفسر اختيار إستراتيجية، أو مهارة (بكلي وبن ساسي، 2018).

ويشير المكون الثاني للتنظيم ما وراء المعرفي، ويتضمن إدارة المتعلم تعلمه، بثلاث عمليات، هي: التخطيط، باختيار إستراتيجيات، أو مهارات مناسبة، تبعًا للهدف المبتغى، والمراقبة، المتعينة بتأكيد السير نحوه، والتقييم، المرتبط بقياس مستوى تحققه (العبيدي والشبيب، 2016).

ومن المهم التزام معلم الرياضيات بالإجراءات التدريسية، المستهدفة وعيه، وتوجيه سياقه التدريسي، من حيث سلامة المهام، والأدوات، وأساليب القيادة الصفية، وكفايته وفقًا لمستوى الفهم، وقبول المتعلمين، وطبيعة محتوى التعلم الرياضي، ومن ثمَّ دعم قدرة المتعلم على تأمل تعلمه، ونواتجه وفق أفكاره الرياضية، لحل المشكلات الرياضية؛ لتوجيه تخطيط تفكيره، وضبطه، والتحكم فيه، ومراقبته، وتقويمه، ليتقبل صرامة الرياضيات، بوصفها تحول دون قصور الحل، أو خطئه، بتطبيق صحيح للقوانين، وصولًا لفهم عميق، وتعلم قوامه المعنى، والوعي بالاستجابة، وتمكين المعلم من نقد المتعلم، وتوجيه نشاطه المعرفي، وأهداف تعلمه.

ويوافق هذا التآلف، والتفاعل بين المعلم، والمتعلم، ومحتوى التعلم، فلسفة النظرية البنائية، بإعمال مسؤولية المتعلم في إنشاء بنيته المعرفية، واستعادة الاتزان المعرفي عقب أي تحديث، أو إبدال لهذه البنية، ما يتطلَّب تعلُّمًا أساسه المشكلات الرياضية، والتفكير الرياضي، بما يجود المعرفة الرياضية، ويجدد فيها: مفاهيميًّا، وإجرائيًّا، وممَّا يثري هذا الجانب: المرونة الفكرية، وتقييم الحجج، ومفاوضتها، وتوليد الأفكار، ومناقشتها تعاونيًّا، تعميقًا للفهم العميق، وتأكيدًا للثقة الرياضية، وإثارةً لمتعة التعلم، وصنعًا لمعتقدات إيجابية نحو تعلم الرياضيات، وثقافتها.

وعليه؛ فيقترح البحث سبع خطوات للتدريس ما وراء المعرفي للرياضيات، هي: تفعيل المعرفة الرياضية، وتقديم تعليمات صريحة، ونمذجة الأداء الرياضي، وتثبيت أفكار التعلم الرياضي، والتطبيق بالقياس عبر ممارسة موجهة، والمقاربة عبر ممارسة مستقلة، ثمَّ تعديل المعرفة وفق تطور خبرات التعلم الرياضي، بإثبات أثره، وتوجيهه.

واهتمت دراسات سابقة بالتفكير ما وراء المعرفي لدى معلمي الرياضيات، فقاست دراسة الكايد (2016) درجة امتلاك معلمي الرياضيات للمرحلة الثانوية في المفرق الأردنية للكفايات التعليمية القائمة على التفكير ما وراء المعرفي، باستبانة طورها الباحث، فظهر امتلاكهم لها بدرجة متوسطة، وجاءت مهارة التخطيط أوَّلًا، تليها مهارة التقويم، ثمَّ مهارة المراجعة، وأخيرًا مهارة المراقبة والتحكم، مع تفوق فئة الإناث، وفئة الخبيرات.

وبيَّنت دراسة دياب (2016) فاعلية إستراتيجية ما وراء المعرفة في تدريس الرياضيات لتنمية التفكير التوليدي، ودافعية الإنجاز لتلاميذ الصف الأول الإعدادي في القاهرة، مع علاقة ارتباطية موجبة بينهما.

وأعدَّت دراسة الحربي وحسين (2017) قائمة بمهارات ما وراء المعرفة اللازمة لتدريس الرياضيات، ثم قاست مستواها لدى معلمات المرحلة الثانوية في المدينة المنورة، فجاءت نتائج ممارسة هذه المهارات إيجابية، وعالية، مع فروق في القياس لصالح ذوات الخبرة الأكثر، والحاصلات على دورات تدريبية.

ولاحظت دراسة الحيلاوي (2017) مهارات التفكير ما وراء المعرفية لمعلمي رياضيات المرحلة الثانوي وطلبتهم، في حماة السورية، أثناء حل المسائل الهندسية، وبيَّنت النتائج تركُّز مهارات التخطيط في تحديد هدف الدرس، وتوجيه الطلبة لفهم عبارات المسألة، وتحديد المعطيات، وتحديد المطلوب، وتحديد العمليات وتسلسلها، وتحديد المعرفة السابقة لحل المسألة، وبرزت في مجال المراقبة والضبط مهارات توجيه الطلبة لتصويب الأخطاء، ولربط المعلومات المكتوبة بالمسألة، وحفظ تسلسل العمليات، أما في مجال التقويم، فاستُخْدِمَتْ مهارات مراجعة الحل، والحكم على مدى تحقق الأهداف، وتوجيه الطلبة للحكم على ملاءمة الطريقة المتبعة.

وبحثت دراسة الشلهوب (2018) فاعلية برنامج تدريبي مقترح لإكساب معلمات رياضيات المرحلة المتوسطة، بمدينة الرياض، مهارات إستراتيجيات ما وراء المعرفة، وقياس أثره على تنمية مهارات حل المشكلة الرياضية لدى طالباتهن، فظهر تفوُّق المجموعة التجريبية للمعلمات، في استخدام هذه الإستراتيجيات في تدريسهن، وتفوُّق طالباتهن في اختبار حل المشكلات الرياضية ككل، ولكل مهارة من مهاراته على حدة، وبحجم أثر مرتفع.

واستهدفت دراسة يوزولماز وآخرين (Yorulmaz et al., 2021) تحديد مستوى الوعي ما وراء المعرفي لمعلمي رياضيات المرحلة الابتدائية الأتراك، قبل الخدمة، ومستوى معتقداتهم في حل المشكلات الرياضية، والعلاقة بينهما، فبيّنت النتائج ارتفاع مستوى وعيهم ما وراء المعرفي، وكانت معتقداتهم حول حل المسائل الرياضية متوسطة، مع علاقة ارتباطية متوسطة بين وعيهم، ومعتقداتهم.

وبحثت دراسة وافوبوا وكسيكوس (Wafubwa & Csíkos, 2021) العلاقة بين الاستخدام المدرَك لمعلمي رياضيات المرحلة الثانوية، في كينيا، لإستراتيجيات التقويم التكويني، ومستويات التنظيم ما وراء المعرفي، وأظهرت النتائج إفادتهم من هذه الإستراتيجيات للتقويم التكويني في التنبؤ إيجابًا بمهارات المراقبة، والتخطيط، وأنَّ فهمهم هذه العلاقة سيساعدهم في نمذجة إستراتيجيات التعلم، ومهاراته لدى المتعلمين.

وبحثت دراسة أوزتورك (Ozturk, 2021) المهارات المعرفية، وما وراء المعرفية لمعلمي الرياضيات الأتراك في تدريس الإثبات الرياضي، بوصفها دراسة حالة نوعية، أشركت ستة معلمين للمرحلة الابتدائية، وثمانية معلمين للمرحلة الثانوية، استجابوا لمقابلات مرتبطة بالمهام، والوثائق، ونماذج المراقبة، فتبيَّن استخدام معلمي المرحلة الابتدائية المهارات المعرفية عامَّةً، بينما استخدم معلمو المرحلة الثانوية المهارات ما وراء المعرفية.

وبلغت الدراسات السَّابقة (17) دراسة، عبر مدى زمني بلغ (15) سنة، بين (2006-2021)، منها تسع دراسات في صرامة الرياضيات، وثماني دراسات في التفكير ما وراء المعرفي، وجاءت دراسات الصرامة في الولايات المتحدة الأميركية، عدا دراسة العيدي (2021)، في محافظة رياض الخبراء.

وتوزعَّت دراسات التفكير ما وراء المعرفي الثمانية، بواقع خمس دراسات عربية، منها دراستان محليتان، ودراسة واحدة لكل من: مصر، والأردن، وسوريا، علاوةً عن ثلاث دراسات أجنبية: اثنتان من تركيا، وواحدة من كينيا. وتعود الدراستان المحليَّتان في التفكير ما وراء المعرفي للحربي وحسين (2017)، والشلهوب (2018).

وتنوَّعت موضوعات الدراسات السابقة المتصلة بالتفكير ما وراء المعرفي، مثل: الكفايات التعليمية القائمة على هذا التفكير، والتفكير التوليدي، ودافعية الإنجاز، ومهارات ما وراء المعرفة لتدريس الرياضيات، والوعي ما وراء المعرفي لمعلمي الرياضيات، واستخدامهم المدرَك لإستراتيجيات التقويم التكويني، ومستويات التنظيم ما وراء المعرفي لديهم، والعلاقة بين المهارات المعرفية، وما وراء المعرفية.

وقد تبيَّنت ندرة الدراسات التي تناولت أيًّا من متغيري البحث محليًّا، علاوةً عن أنَّه لم ترد أيَّة دراسة محلية، أو عربية تجمع بينهما، ما يجعل البحث الحالي يمثل إضافة جيدة، في موضوع بحثي مفيد لتعليم الرياضيات.

منهج البحث:

طبَّق البحث منهجًا وصفيًّا كمِّيًّا، شمل التصميم الوصفي المسحي؛ لتحديد عبارات مقياسي الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي، بوصفهما متغيري البحث، والتصميم الوصفي الارتباطي؛ للكشف عمَّا إذا كانت هناك علاقة ارتباطية دالة إحصائيًّا بينهما.

مجتمع البحث وعينته:

أُخِذَ بأسلوب الحصر الشامل، بتضمين البحث جميع معلمي الرياضيات بمدارس البنين الثانوية بمدينة عرعر، بوصفهم عينة قصدية، تضم (71) معلِّمًا، في (21) مدرسة ثانوية.

أدوات البحث: طبق البحث أداتين، صمَّمهما الباحث، هما:

1- مقياس الصرامة الرياضية:

أفاد البحث لبناء هذا المقياس، من دراسات: جونسون (Johnson, 2010)، وأكاي (Akcay, 2012)، وماكدونو (McDonough, 2013)، ودريقير وآخرين (Draeger et al., 2015)، وبانر (Banner, 2016)، وديلتي (Diletti, 2017)، وبوسر (Buser, 2018)، والعيدي (2021). وآل المقياس، في صورته النهائية، بعد التحكيم، إلى (15) عبارة، في أربعة أبعاد، يوضحها جدول (1) الآتي:

جدول (1)

توزيع عبارات مقياس الصرامة الرياضية على أبعاده

م	البعد	عدد العبارات
1	محتوى المهمة	3
2	تنفيذ المهمة	4
3	المناقشات حول المهمة	5
4	توقعات المعلم حول أداء المهمة	3
	المجموع	15

وحُسِبَتْ قيم الاتساق الداخلي للمقياس، بتطبيقه على عينة استطلاعية من (27) معلم رياضيات، خارج العينة، فحُسِبَ معامل ارتباط بيرسون بين كل عبارة وبُعدها، ويوضح نتائج ذلك جدول (2):

جدول (2)

معاملات الارتباط بين كل عبارة وبعدها ضمن مقياس الصرامة الرياضية

العبارة	معامل الارتباط	العبارة	معامل الارتباط	العبارة	معامل الارتباط
1	**0.77	6	**0.84	11	**0.74
2	**0.72	7	**0.71	12	**0.81
3	**0.83	8	**0.69	13	**0.76
4	**0.68	9	**0.78	14	**0.63
5	**0.72	10	**0.79	15	**0.80

(*) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.05$ (**) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.01$

وحُسِبَ معامل ارتباط بيرسون بين كل بُعْد والمقياس إجمالًا، ويوضح نتائج ذلك جدول (3):

جدول (3)

معاملات الارتباط بين كل بعد ضمن مقياس الصرامة الرياضية والمقياس إجمالًا

م	البُعْد	العبارات	معامل الارتباط
1	صرامة المهمة	3-1	**0.77
2	صرامة تنفيذ المهمة	7-4	**0.74
3	صرامة المناقشات	12-8	**0.76
4	صرامة التوقعات	15-13	**0.73

(*) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.05$ (**) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.01$

وحُسِبَ معامل ثبات مقياس الصرامة الرياضية وفقًا لمعادلة KR-21، ويبيّن نتيجة ذلك، جدول (4):

جدول (4)

معامل ثبات مقياس الصرامة الرياضية باستخدام معامل KR-21

المقياس	عدد العبارات	معامل الثبات
الصرامة الرياضية	15	0.779

وتشير نتائج الجداول (2، 3، 4) إلى تمتُّع مقياس الصرامة الرياضية بمستوى مقبول من الموثوقية، يمكن معه الاطمئنان لنتائج تطبيقه.

2- مقياس التفكير ما وراء المعرفي:

أفاد البحث لبناء هذا المقياس من دراسات: الكايد (2016)، والحربي وحسين (2017)، والحيلاوي (2017)، والشلهوب (2018)، ويوزولماز وآخرين (Yorulmaz et al., 2021)، ووافوبوا وكسيكوس (Wafubwa & Csíkos, 2021)، وأوزتورك (Ozturk, 2021)، وانتهى المقياس، في صورته النهائية وفقًا للتحكيم، إلى (36) عبارة، موزعة على ثلاثة أبعاد، يبينها جدول (5):

جدول (5)

توزيع عبارات مقياس التفكير ما وراء المعرفي على أبعاده

م	البعد	عدد العبارات
1	معرفة المعرفة	13
2	تنظيم المعرفة	12
3	معالجة المعرفة	11
	المجموع	36

وحُسِبَتْ قيم الاتساق الداخلي للمقياس، بتطبيقه على العينة الاستطلاعية، فحُسِبَ معامل ارتباط بيرسون بين كل عبارة وبُعْدِها، ويوضح نتائج ذلك جدول (6):

جدول (6)

معاملات الارتباط بين كل عبارة وبُعْدها ضمن مقياس التفكير ما وراء المعرفي

العبارة	معامل الارتباط	العبارة	معامل الارتباط	العبارة	معامل الارتباط
1	**0.81	13	**0.73	25	**0.78
2	**0.79	14	**0.79	26	**0.82
3	**0.73	15	**0.78	27	**0.69
4	**0.80	16	**0.68	28	**0.75
5	**0.67	17	**0.73	29	**0.76
6	**0.73	18	**0.78	30	**0.80
7	**0.81	19	**0.74	31	**0.68
8	**0.67	20	**0.78	32	**0.73
9	**0.76	21	**0.76	33	**0.76
10	**0.75	22	**0.73	34	**0.79
11	**0.80	23	**0.74	35	**0.80
12	**0.82	24	**0.71	36	**0.77

(*) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.05$ (**) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.01$

وحُسِبَ معامل ارتباط بيرسون بين كل بُعْد والمقياس إجمالًا، ويوضح نتائج ذلك جدول (7):

جدول (7)

معاملات الارتباط بين كل بُعْد ضمن مقياس التفكير ما وراء المعرفي والمقياس إجمالًا

م	البُعْد	العبارات	معامل الارتباط
1	معرفة المعرفة	13-1	**0.76
2	تنظيم المعرفة	25-14	**0.75
3	معالجة المعرفة	36-26	**0.76

(*) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.05$ (**) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.01$

وحُسِبَ معامل ثبات مقياس التفكير ما وراء المعرفي وفقًا لمعادلة KR-21، كما يبيّن قيمته جدول (8):

جدول (8)

معامل ثبات مقياس التفكير ما وراء المعرفي باستخدام معامل KR-21

المقياس	عدد العبارات	معامل الثبات
التفكير ما وراء المعرفي	36	0.774

وتشير نتائج الجداول (6، 7، 8) إلى تمتُّع مقياس التفكير ما وراء المعرفي بمستوى مقبول من الموثوقية، يمكن معه الاطمئنان لنتائج تطبيقه.

وصيغت عبارات المقياسين بما يحقق مرونة الأسلوب، ودقة اللغة، ومباشرة المعنى، وإجرائية الوصف، وطُبِّقَ للحكم على الاستجابات، ومتوسطاتها، تدرُّجًا خماسيًّا، كما يبين ذلك جدول (9):

جدول (9)

الحكم على مستوى الاستجابة المفردة ومتوسط العينة على المتغيرين

الحكم على المستوى	التدرُّج			
	وفقًا للاستجابة المفردة	في ضوء متوسط العينة للعبارة	المتوسط الكلي لمقياس الصرامة الرياضية	المتوسط الكلي لمقياس التفكير ما وراء المعرفي
عالي جدًّا	5	[5 ،4.20)	[75 ،63)	[180 ،151.2)
عالي	4	[4.20 ،3.40)	[63 ،51)	[151.2 ،122.4)
متوسط	3	[3.40 ،2.60)	[51 ،39)	[122.4 ،93.6)
متدني جدًّا	2	[2.60 ،1.80)	[39 ،27)	[93.6 ،64.8)
متدني	1	[1.80 ،1]	[27 ،15]	[64.8 ،36)

الأساليب الإحصائية:

طُبِّقَتِ الأساليب الإحصائيّة التالية ضمن حزمة SPSS (V.28):

1. معامل KR-21؛ لحساب ثبات مقياسي البحث.
2. المتوسطات الحسابية، والانحرافات المعيارية، والأخطاء المعيارية، لكل عبارة، ولكل محور، ولكل من المقياسين؛ لتحديد الرتب، ومستويات القياس، في إجابة السؤالين: الأول والثاني.
3. معامل بيرسون للارتباط؛ للكشف عمَّا إذا كانت هناك علاقة ارتباطية دالة إحصائيًّا عند ($\alpha \leq 0.05$) بين الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي، للمعلمين، في إجابة السؤال الثالث.

نتائج البحث ومناقشتها:

يبيّن جدول (10) نتائج إجابة السؤالين الأول والثاني، فيما يخص حساب مستوى الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي لمعلمي رياضيات المرحلة الثانوية:

جدول (10)

مستوى الصرامة الرياضية والتفكير ما وراء المعرفي لمعلمي رياضيات المرحلة الثانوية ن=71

المتغير	النتائج الإحصائية والحكم على المستوى			
	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	الخطأ المعياري	المستوى
الصرامة الرياضية	50.3521	15.71541	1.86508	متوسط
التفكير ما وراء المعرفي	108.5211	30.12396	3.57506	متوسط

ويبيّن جدول (10) أنَّ مستوى المعلمين كان متوسّطًا على مقياسي الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي.

ويمكن تفسير هذه النتيجة في كون المعلم معنيًّا بتحقيق المتعلمين فهمًا عميقًا لتعلمهم الرياضي، ومنه استيعابهم المفاهيمي، وطلاقتهم الإجرائية، فتكون الممارسات التدريسية المتصلة بالصرامة الرياضية داعمةً إتقان الفهم، والتحليل، والتوظيف، لإجراءات الحل، المسبوقة بتفكير تشاركي للمتعلمين يوجّهه المعلم بمفاوضة أفكارهم الرياضية، ونقد الربط، وإثارة الشك العلمي في المقترح، والممارسة، فتستدعي غاية الصرامة التدريسية تأمل المعلم مبررات أخطاء المتعلم، وتفسيرها، ضمانًا لتمكينه من تنفيذ مهام تشخيصية، وعلاجية، بوصفه يعي أثر مغالطة منطقية، أو فجوة تدريسية، أو قصور مفاهيمي، علاوةً عن تباين مشاعر المتعلمين، وقيمهم، وإدراكهم، وتقبُّلهم مهامهم، ورغبة إنجازها بإتقان، ما يجعلهم يتجنبون الأخطاء، ويتقبلون النقد المعلم زمن حدوثها، بما يحقق قيمتهم في تعلمهم الرياضي.

وتوافق هذه النتيجة نتائج دراسة الكايد (2016)، الَّتي بيَّنت امتلاك معلمي رياضيات المرحلة الثانوية للكفايات التعليمية القائمة على التفكير ما وراء المعرفي بدرجة متوسطة، وتختلف عن نتيجة دراسة الحربي وحسين (2017)؛ إذ كانت درجة ممارسة معلمات المرحلة الثانوية مهارات ما وراء المعرفة اللازمة لتدريس الرياضيات عالية، واختلفت عن دراسة يوزولماز وآخرين (Yorulmaz et al., 2021)، الَّتي بيّنت ارتفاع مستوى الوعي ما وراء المعرفي لمعلمي الرياضيات.

وأجابت الدراسة عن السؤال الثالث، بحساب قيمة ارتباط بيرسون بين المتغيرين؛ فجاءت نتيجة ذلك كما يبينها جدول (11):

جدول (11)

نتيجة حساب ارتباط بيرسون بين المغيرين ن=71

قيمة ارتباط بيرسون	مستوى الارتباط
0.310	متوسط

(*) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.05$ (**) قيمٌ دالّةٌ إحصائيًّا عند مستوى الدّلالة $\alpha \leq 0.01$

ويبيّن جدول (11) أنّ قيمة ارتباط بيرسون بين الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي، لمعلمي رياضيات المرحلة الثانوية هي (0.310)، وهي دالَّةٌ إحصائيًّا عند ($\alpha \leq 0.01$)، وبالتالي؛ فهي دالَّةٌ إحصائيًّا عند ($\alpha \leq 0.05$)، وتؤكد علاقة ارتباطية طردية متوسطة بين المتغيرين لدى العينة، استنادًا إلى ما ذكره النجار والحنفي (2010) من أنَّ ارتباط بيرسون يكون متوسطًا ابتداءً من القيمة (0,3) إلى أقل من (0.7).

ويمكن تفسير هذه النتيجة بأنَّ مهارات التفكير ما وراء المعرفي لتدريس الرياضيات تدعم فهم المعلم قصور المتعلم، وتعلمه الرياضي القائم على المعنى، بما يفيد المعلم في تشخيص الأفكار الرياضية، ضمن تفاعل المتعلم مع المفاهيم الرياضية، بما يمثل أداة توجيه لمعلم الرياضيات نحو تحديد مناطق الضعف المعرفي، والمغالطات المنطقية لدى المتعلمين، خاصَّةً إذا ما انطلقت هذه المهام التدريسية المتقدمة من وعي المعلم بأن المناقشة الرياضية فرصة لمراجعة الفهم الرياضي، ومعالجته، عبر سياق يشعر المتعلم بأهمية مشاركته في تصويب تعلمه الرياضي؛ بوصفه ذا شراكة مسؤولة في هذا التعلم، تبعًا لتوجيه معلمٍ يتقن نقل قيم صرامته التدريسية؛ بوصفها تؤكد ضرورة إتقان مستند إلى استيعاب مفاهيمي، وطلاقة إجرائية، يدعمان تقبل التعلم، وتقبل قيم الإتقان بمتعة، نحو سلامة التطبيق، وكفايته، وجودة التفكير الرياضي.

وتتَّفق هذه النتيجة مع نتائج دراسة وافوبوا وكسيكوس (Wafubwa & Csíkos, 2021)، الَّتي بيَّنت إفادة معلمي رياضيات المرحلة الابتدائية من إستراتيجيات التقويم التكويني للتنبؤ إيجابًا بمهارات المراقبة، والتخطيط، ونمذجة إستراتيجيات التعلم ومهاراته للمتعلمين، ودراسة يوزولماز وآخرين (Yorulmaz et al., 2021)، التي بيَّنت علاقة ارتباطية متوسطة للوعي ما وراء المعرفي لمعلمي الرياضيات، بمعتقداتهم عن حل المسائل الرياضية.

وتختلف عن دراسة ديلتي (Diletti, 2017)، الَّتي بيَّنت تدني مستويات الجهد المعرفي في الصرامة الرياضية تبعًا للاهتمام التدريسي وفق التحولات الرياضية لهذه الصرامة، وضعف توظيف هذه التحولات لتحقيقها.

التوصيات:

يوصي البحث وفق نتائجه، ومناقشة هذه النتائج، بالآتي:

1. تثقيف معلمي الرياضيات، وتدريبهم على مداخل، وإستراتيجيات تدريسية حديثة، وممارسات تدريسية فعَّالة، تبعًا للنظرية البنائية، بما يطور معارفهم، وينمي مهاراتهم، ويقوِّم اتجاهاتهم نحو الرياضيات وتدريسها، صوب عمق معرفي، وثقة تدريسية، وكفاءة ذاتية، توجِّه صرامتهم الرياضية، وتفكيرهم ما وراء المعرفي.
2. تنمية تمكنهم المعرفي، في جوانب، مثل: المغالطات المنطقية، بالإفادة من متغيري البحث، بما يدعم قدرتهم على تحليل محتوى الرياضيات مفاهيميًا، ومعالجته وظيفيًّا، وتحقيق قناعة المتعلم ومتعته، عبر مهام تعلم رياضي تثير الاهتمام، والتفاعل، علاوةً عن قدرة المعلم على تشخيص التعلم وعلاجه، وتنميته.
3. تضمين موضوعي الصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي في خطط تنميتهم المهنية، وتوجيه الباحثين في تعليم الرياضيات للإفادة منهما.
4. توظيف مقياسي البحث: للصرامة الرياضية، والتفكير ما وراء المعرفي، في رصد الممارسات التدريسية، وتقويم أداء معلمي الرياضيات، خلال الزيارات الإشرافية.

المقترحات:

يقترح البحث، إجراء دراسات مستقبلية، تحاول بحث الآتي:

1. الممارسات التدريسية لمعلمي الرياضيات الداعمة للصرامة الأكاديمية.
2. فاعليَّة مجتمعات التعلم المهنية في تنمية الصرامة الرياضية والتفكير ما وراء المعرفي لمعلمي الرياضيات.

3. فاعلية برنامج تدريبي قائم على الصرامة الرياضية لتنمية إستراتيجيات التدريس ما وراء المعرفي لمعلمي الرياضيات.
4. الفروق في الصرامة الرياضية والتفكير ما وراء المعرفي للمعلمين تبعًا لمتغيراتٍ، مثل: النوع الاجتماعي، وخبرة التدريس، والمؤهل، والحصول على الرخصة المهنية.

المراجع:

بكلي، خالد، وبن ساسي، عقيل. (2018). التفكير ما وراء المعرفي في الرياضيات لدى عينة من الموهوبين فيها دراسة ميدانية بمدينة غرداية. *مجلة الباحث في العلوم الإنسانية والاجتماعية*، *10*(1)، 1054-1037.

الحربي، بدرية حميد، حسين، عبير سليمان. (2017). مدى ممارسة معلمات المرحلة الثانوية لمهارات ما وراء المعرفة في تدريس الرياضيات وعلاقتها بمتغيرات المهنة. *مجلة تربويات الرياضيات*، *20*(9)، 24-6.

الحيلاوي، ماهر محمد. (2017). تعرف مهارات التفكير ما وراء المعرفية المستخدمة من قبل مدرسي الرياضيات وطلبتهم أثناء حل المسائل الهندسية في المرحلة الثانوية في مدينة حماة. *مجلة جامعة البعث للعلوم الإنسانية*، *39*(18)، 11-36.

خريسات، محمد سليمان. (2016). مستوى التفكير ما وراء المعرفي لدى طلبة الجامعة وعلاقته بالتحصيل الأكاديمي. *مجلة كلية التربية بجامعة الأزهر*، *35*(168)، 232-205.

دياب، رضا أحمد. (2016). فاعلية استخدام استراتيجية ما وراء المعرفة في تدريس الرياضيات في تنمية التفكير التوليدي والدافعية للإنجاز لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادي. *مجلة تربويات الرياضيات*، *19*(3)، 252-164.

الشلهوب، سمر عبد العزيز. (2018). فاعلية برنامج تدريبي مقترح في إكساب معلمات الرياضيات مهارات استخدام بعض استراتيجيات ما وراء المعرفة في تدريسهن وأثر ذلك على تنمية مهارات حل المشكلة الرياضية لدى طالباتهن. *مجلة جامعة أم القرى للعلوم التربوية والنفسية*، *10*(1)، 259-211.

العبيدي، رقية، والشبيب، علاء. (2016). *التفكير ما وراء معرفي رؤية نظرية ومواقف تطبيقية*. الأردن: دار أسامة للنشر والتوزيع.

العيدي، آمنة بنت حمد. (2021). *برنامج تطوير مهني قائم على التدريب التعليمي في الرياضيات (Math Coaching) وفاعليته في تنمية الصرامة الأكاديمية لدى معلمات المرحلة المتوسطة*، [أطروحة دكتوراه غير منشورة]. جامعة القصيم.

الكايد، عمران عيسى. (2016). *درجة امتلاك معلمي الرياضيات للمرحلة الثانوية في محافظة المفرق للكفايات التعليمية القائمة على التفكير ما وراء المعرفي*، [رسالة ماجستير غير منشورة]. جامعة الحسين بن طلال.

النجار، عبد الله، وحنفي، أسامة. (2010). *مبادئ الإحصاء للعلوم الإنسانية مع تطبيقات حاسوبية*. مؤسسة شبكة البيانات.

Akcay, A. O. (2016). An Examination of Pre-Service Mathematics Teachers' Integration of Technology into Instructional Activities Using a Cognitive Demand Perspective and Levels of Technology Implementation [*Unpublished doctoral dissertation*]. Duquesne University at Pennsylvania.

Banner, I. M. (2016). Teachers' Perspectives and Development of Academic Rigor: An Action Research Study [*Unpublished doctoral dissertation*]. University of Bridgeport.

Bernard, M., & Bachu, E. (2015). Enhancing the Metacognitive Skill of Novice Programmers Through Collaborative Learning Metacognition. *Intelligent Systems Reference Library*, 76, 277-298.

Blackburn, B. R. (2023). *Rigor in Your Classroom: A Toolkit for Teachers (2nd Edition)*. Routledge.

Boston, M., & Wolf, M. K. (2006). *Assessing Academic Rigor in Mathematics Instruction: The Development of the Instructional Quality Assessment Toolkit* (CSE Report 672). Los Angeles: University of California, Los Angeles, National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST).

Buser, K. M. (2018). Coaching: Professional Development for Mathematics Teachers [*Unpublished doctoral dissertation*]. Robert Morris University at Pittsburgh.

Chazan, D., & Ball, D. L. (2001). Beyond Being Told not to Tell. *For the Learning of Mathematics, 19*(2), 2-10.

Cooper, K. S. (2014). Eliciting Engagement in the High School Classroom: A Mixed-Methods Examination of Teaching Practices. *American Education Research Journal, 51*(2), 363-402.

Dana Center Mathematics Pathways. (2019) *What Is Rigor in Mathematics Really*. The Charles A. Dana Center at The University of Texas at Austin.

Diletti, J. S. (2017). Teacher Concerns and the Enacted Curriculum of the Common Core State Standards in High School Mathematics [*Unpublished Doctoral Dissertation*]. State University of New York at Buffalo.

Draeger, J., del Prado Hill, P., & Mahler, R. (2015). Developing A Student Conception of Academic Rigor. *Innovative Higher Education, 40*(3), 215-228.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving. In *The Nature of Intelligence*, L. B. Resnick. Erlbaum.

Gordon, F. B. (2010). Rigor Y Demostracion En Matematicas. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp)*,*104*(1), 61-79.

Grant, G. (2014). A Metacognitive-Based Tutoring Program to Improve Mathematical Abilities of Rural High School Students: An Action Research Study [*Unpublished Doctoral Dissertation*]. Capella University.

Grizzle-Martin, T. (2014). The Effect of Cognitive and Metacognitive Based Instruction on Problem Solving by Elementary Students with Mathematical Learning Difficulties [*Unpublished Doctoral Dissertation*]. Walden University.

Hamami, Y. (2014). Mathematical Rigor, Proof Gap and the Validity of Mathematical Inference. *Philosophia Scientiæ, 18*(1) , 7-26.

Hull, T. H., Miles, R. H., & Balka, D. S. (2014). *Realizing Rigor in the Mathematics Classroom*. Corwin Press.

Johnson, L. (2010). Improving Rigor and Engagement Through Communities of Practice [*Unpublished Doctoral Dissertation*]. Arizona State University.

Lampert, M. (2001). *Teaching Problems and the Problems of Teaching.* New Haven, CT: Yale University Press.

McDonough, J. S. (2013). A Case Study of How Professional Learning Communities Influence Morale and Rigor in the Classroom. [*Unpublished Doctoral Dissertation*]. Lamar University at Beaumont.

Meyer, J. P., Doromal, J. B., Wei, X., & Zhu, S. (2017). A Criterion-Referenced Approach to Student Ratings of Instruction. *Research in Higher Education, 58*(5), 545-567.

Öztürk, M., & Kaplan, A. (2019). Cognitive Analysis of Constructing Algebraic Proof Processes: A Mixed Method Research. *Education and Science, 44*(197), 25–64.

Öztürk, M. (2021). Cognitive and Metacognitive Skills Performed by Math Teachers in the Proving Process of Number Theory. *Athens Journal of Education, 8*(1), 53-72.

Raoofi, S., Chan, S. H., Mukundan, J., & Rashid, S. M. (2014). Metacognition and Second/Foreign Language Learning. *English Language Teaching, 7*(1), 36-49.

Reys, R., Reys, B., Lapan, R., & Holliday, G. (2003). Assessing the Impact of Standards-Based Middle Grades Mathematics Curriculum Materials on Student Achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 74-95.

Schoenfeld, A. H. (2002). Making Mathematics Work for All Children: Issues of Standards, Testing, and Equity. *Educational Researcher, 31*(1), 13-25.

Spruce, R., & Bol, L. (2015). Teacher Beliefs, Knowledge, and Practice of Self-Regulated Learning. *Metacognition and Learning, 10*(2), 245-277.

Stamm, D. M. (2018). The Illusion of Rigor. *Nonpartisan Education Review*, *14*(1), 1-8.

Wafubwa, R. N. & Csíkos, C. (2021). Formative Assessment as a Predictor of Mathematics Teachers' Levels of Metacognitive Regulation. *International Journal of Instruction*, *14*(1), 983-998.

Weiss, I. R., & Pasley, J.P. (2004). What is High Quality Instruction? *Educational Leadership, 61*(5), 24-28.

Winne, P. H., & Azevedo, R. (2014). Metacognition. In R. K. Sawyer (Ed.) *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, (pp.63-87). Cambridge University Press.

Wolf, M. K., Crosson, A., & Resnick, L. B. (2004). Classroom Talk for Rigorous Reading Comprehension Instruction. *Paper Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Diego, CA.

Yorulmaz, A.; Uysal, H.; Çokçaliskan, H. (2021). Pre-Service Primary School Teachers' Metacognitive Awareness and Beliefs about Mathematical Problem Solving. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, *6*(3), 239-259.